

## Katedra Analizy Funkcjonalnej i Topologii

### Sprawozdanie dotyczące działań badawczo-dydaktycznych w roku akademickim 2019/2020

#### Tematyka badawcza

I. Funkcje Rzeczywiste: (dr Paulina Szyszkowska, prof. uczelni, dr Marcin Kowalewski, dr Jolanta Kosman, dr Waldemar Sieg)

1. Uogólnienia Lematu Urysohna – oddzielanie zbiorów przy pomocy funkcji z zadanej klasy.
2. Oddzielanie zbiorów funkcjami spełniającymi silny warunek Świątkowskiego.
3. Przeliczalnie ciągłe funkcje Darboux.
4. Rozszerzenia funkcji o domkniętym wykresie, półciągłych z dołu (z góry) i quasi-ciągłych zdefiniowanych na zbiorach gęstych.
5. Badanie granic ciągów odwzorowań z pewnych podzbiorów przestrzeni funkcji pierwszej klasy Baire'a.

II. Analiza funkcyjonalna: (dr Halina Wiśniewska, dr Waldemar Sieg, dr Juliusz Stochmal, dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni)

1. Charakteryzacja pewnych endomorfizmów (ortomorfizmów) krat liniowych z zastosowaniem do niebanachowskich przestrzeni Musielaka-Orlicza.
2. Liniowe operatory rozszerzania w pewnych klasach krat liniowych.
3. Rozszerzanie wektorowych funkcji ciągłych.
4. Rozszerzanie funkcji Baire'a oraz twierdzenia aproksymacyjne typu Freudenthala dla przestrzeni alfa-Baire'a.

III. Topologiczna teoria liczb: (dr Paulina Szyszkowska, prof. uczelni)

1. Topologie na zbiorze liczb naturalnych – ideały zbiorów nigdziegęstych w topologii Rizzy i topologii wspólnych dzielników.

IV. Elementarna teoria liczb: (dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni, dr Marcin Kowalewski)

1. Własności multiplikatywne funkcji  $\pi$  i zastosowania do oszacowań pewnych liczb pierwszych.

V. Kryptologia: (dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni)

1. Systemy kryptograficzne z kluczem publicznym.

#### Opis wyników

I. Funkcje Rzeczywiste: (dr Paulina Szyszkowska, prof. uczelni, dr Marcin Kowalewski, dr Jolanta Kosman, dr Waldemar Sieg)

1. Scharakteryzowano klasyczne i zmodyfikowane własności oddzielania zbiorów przy pomocy funkcji Darboux quasi-ciągłej półciągłej z góry oraz określono związki pomiędzy oddzielaniem zbiorów przy pomocy funkcji, a oddzielaniem zbiorów przy pomocy innych zbiorów. Uzyskany wynik posłużył do rozwiązania problemu postawionego przez M. Kowalewskiego i A. Maliszewskiego dotyczącego oddzielania zbiorów przy pomocy funkcji należących do pierwszej klasy Baire'a.

2. Zbadano szereg własności skończenie ciągłych funkcji Darboux. Między innymi udowodniono twierdzenie, że istnieje przeliczalnie ciągła funkcja Darboux, która jest wszędzie nieciągła, co jest zaprzeczeniem twierdzenia 6 opublikowanego przez M.R. Wójcik, *Darboux functions with nowhere dense graphs*, *Topology and its Applications* 178 (2014).

3. Podano warunek wystarczający na to, aby półciągłą z góry (z dołu) funkcję  $g$  określoną na ustalonej podprzestrzeni gęstej przestrzeni topologicznej  $X$  można było przedłużyć do półciągłej z góry (z dołu) funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Ponadto wykazano warunek równoważny dla istnienia rozszerzenia quasi-ciągłej funkcji  $g$  półciągłej z góry (z dołu) zdefiniowanej na ustalonej podprzestrzeni gęstej przestrzeni topologicznej  $X$  do quasi-ciągłej półciągłej z góry (z dołu) funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Podano również warunek wystarczający na to, aby funkcję  $g$  o domkniętym wykresie określoną na ustalonej podprzestrzeni gęstej przestrzeni metrycznej  $X$  można było przedłużyć do funkcji o domkniętym wykresie  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

4. Scharakteryzowano zbiór punktów ograniczoności oraz zbiór punktów zbieżności ciągów funkcji o domkniętym wykresie. Podano uwagi na temat zbiorów punktów rozbieżności tych ciągów. Scharakteryzowano zbiór punktów idealowej zbieżności ciągów funkcji o domkniętym wykresie.

II. Analiza funkcjonalna: (dr Halina Wiśniewska, dr Waldemar Sieg, dr Juliusz Stochmal, dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni)

1. Podano warunki wystarczające na to aby klasa ortomorfizmów-  $\text{Orth}(E)$  pokrywała się z klasą ortomorfizmów centralnych-  $Z(E)$  dla niebanachowskich  $F$ -krat  $E$  nie zawierających izomorficznej kopii przestrzeni wszystkich ciągów rzeczywistych. W szczególności podano charakteryzację równości klas ortomorfizmów  $\text{Orth}(E)$  i  $Z(E)$  dla ciągowych przestrzeni symetrycznych  $E$ . Otrzymano również użyteczne kryteria szeregowo dla klasy  $F$ -krat dyskretnych  $E$  z normą porządkowo ciągłą dla których zachodzi równość  $\text{Orth}(E) = Z(E)$ . Podano również zastosowania tych kryteriów dla ciągowych przestrzeni Musielaka-Orlicza.

2. Podano konstrukcje operatorów  $T$  liniowego rozszerzania z podkrat  $G$  kraty liniowej  $E$  na całą kratę  $E$ , tj.  $T(f+g)=T(f) + T(g)$ , gdzie  $f, g$  to operatory liniowe z  $G$  do  $H$  (kata liniowa). Rozpatrywane były dwa przypadki:  $G$  jest podkratą majoryzującą kraty  $E$ , oraz  $G$  jest ideałem kraty  $E$ . Wyniki zastosowano dla szerokich klas operatorów: zwartych,  $M$ -zwartych,  $L$ -zwartych, słabo zwartych i innych.

3. W pracy *Extesion of continuous operators on  $C_b(X, E)$*  wykazano możliwość rozszerzania operatorów z przestrzeni  $C_b(X, E)$  na przestrzeń funkcji silnie mierzalnych z zastosowaniem do operatorów Dunforda-Pettisa, Dieudonne, bezwarunkowo zbieżnych i słabo przewartych. W artykule *Characterizations of continuous operators on  $C_b(X)$  with the strict topology* wykazano, że operator z jądrem, określony na przestrzeni funkcji  $C_b(X)$  z topologią ścisłą jest operatorem nuklearnym.

4. Wykazano, że każdą funkcją pierwszej klasy Baire'a określoną na podzbiorze  $G$ -delta przestrzeni doskonale normalnej  $X$  można rozszerzyć na całą przestrzeń  $X$  z zachowaniem ograniczenia. Jako wynik dodatkowy otrzymano, że przestrzeń funkcji  $B_1(X)$  ma własność porządkową  $\delta$  (= aproksymacyjna/spektralna własność Freudenthala) co jest własnością słabszą niż sigma-porządkowa zupełność (przestrzeń  $B_1(X)$  jest taką w wyjątkowych przypadkach, np. gdy jest tzw.  $P$ -przestrzenią, tj. każdy podzbiór  $G$ -delta  $X$  jest otwarty).

III. Topologiczna teoria liczb: (dr Paulina Szyszkowska, prof. uczelni)

1. Zbadano zależności pomiędzy ideałami zbiorów nigdziegęstych w topologiach Furstenberga, Rizzy i wspólnych dzielników.

IV. Elementarna teoria liczb: (dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni, dr Marcin Kowalewski)

1. Podano oszacowania multiplikatywne dla funkcji  $\pi$  typu  $\pi(tx) < (1-a)t \pi(x)$  z zastosowaniem do wyznaczania przedziałów zawierających liczby pierwsze.

2. Rozwiązano (negatywnie) otwarty problem nierówności  $\pi(x+y) < \pi(x) + \pi(y)$  podając odpowiednie pary  $(x,y)$  spełniające nierówność przeciwną.

V. Kryptologia: (dr hab. Marek Wójtowicz, prof. uczelni)

1. Przedstawiono system kryptograficzny typu RSA oparty na liczbach spełniających tylko podstawową kongruencję Fermata (niekoniecznie liczby pierwsze) działający na dowolnie dużych liczbach. Ma to przewagę nad klasycznym systemem RSA, ponieważ nie trzeba weryfikować pierwszości danych liczb, a funkcja zastępująca funkcję Fermata wyznacza również poprawnie klucze prywatny i publiczny.

## Publikacje

### 3.1. Opublikowane w ostatecznej wersji

1. P. Szyszkowska, *Separating sets in bitopological spaces by  $P$ -LSC and  $L$ -USC functions*, Quaestiones Mathematicae, 2019, Vol. 42, iss. 8, pp. 1117-1124.
2. T. Natkaniec, W. Sieg, *On convergence of sequences of functions possessing closed graphs*, Georgian Mathematical Journal, 2019, Vol. 26, iss. 4, pp. 573-582.
3. H. Wiśniewska, M. Wójtowicz, *A class of a non-Banach  $F$ -lattices  $E$  such that every orthomorphism on  $E$  is central with applications to Musielak-Orlicz sequence spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, Vol. 492, iss. 1, art. no 124398.

### 3.2. On-line

1. J. Kosman, *Extensions of semicontinuous and quasi-continuous functions from dense subspaces*, Quaestiones Mathematicae (2019).

2. M. Kowalewski, M. Marciniak, *Finitely continuous Darboux functions*, Quaestiones Mathematicae (2020).
3. M. Wójtowicz, *RSA for poor men: a new cryptosystem based on probable primes to base 2 numbers*, Cryptology ePrint Archive, 2020/624.

### 3.3. Przyjęte do druku

1. P. Szyszkowska, *Separating sets by functions and by sets* - Zaakceptowana do druku w Topology and its Applications.

### 3.4. W recenzji lub w przygotowaniu

1. A. Nowik, P. Szyszkowska, *On some relations between ideals of nowhere dense sets in topologies on positive integers* (w recenzji).
2. J. Stochmal, *Extensions of operators on  $C_b(X, E)$*  (w recenzji).
3. M. Nowak, J. Stochmal, *Characterizations of continuous operators on  $C_b(X)$  with the strict topology* (w recenzji).
4. P. Sworowski, W. Sieg, *Uniform limits of  $B_1^{**}$  - functions*, arXiv: 2006.00050 (w recenzji).
5. H. Wiśniewska, M. Wójtowicz, *Linear extensions of operators on Riesz spaces*.
6. M. Wójtowicz, *A linear form of the Luxemburg-Schep&Lipecki theorem on extensions of Riesz homomorphisms*.
7. M. Wójtowicz, *A linear form of the Kantorovich-type theorem on extension of operators on Riesz spaces with applications to extensions of Radon measures*.
8. M. Wójtowicz, W. Sieg, *Extensions of functions of Baire- $\alpha$  functions*.
9. M. Wójtowicz, W. Sieg, *The order properties of the Riesz spaces of Baire- $\alpha$  functions on a topological space*.
10. M. Kowalewski, *Separating sets by strong Świątkowski functions*.
11. J. Kosman, *Extensions of functions with a closed graph from dense subspaces*.

### Konferencje naukowe – organizacja, udział i wygłoszone referaty

1. M. Wójtowicz, R. Shevchuk referat pt. *The Monte Carlo type attack on the RSA cryptosystem*, 2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT'2020), Deggendorf (Niemcy), on-line, 16-18 September 2020.

### Seminaria – udział i wygłoszone referaty

#### I. Seminarium naukowe Instytutu Matematyki UKW:

1. M. Wójtowicz – *Struktura algebraiczna zbioru trójek pitagorejskich*, 16.10.2019.
2. P. Szyszkowska - *Porównanie idealów zbiorów nigdziegęstych w wybranych topologiach na zbiorze liczb naturalnych*, 23.10.2019
3. W. Sieg - *Zbiory punktów zbieżności ciągów pewnych funkcji z pierwszej klasy Baire'a*, 13.11.2019.
4. J. Stochmal – *Operatory ciągle na przestrzeni  $C_b(X)$  z topologią ścisłą*, 27.11.2019.
5. J. Kosman - *Rozszerzenia funkcji o domkniętym wykresie, półciągłych z dołu (z góry) i quasi-ciągłych zdefiniowanych na zbiorach gęstych*, 15.01.2020.

#### II. Wydział Informatyki Uniwersytetu w Tarnopolu, Ukraina:

1. M. Wójtowicz, *Pseudo-random number generators based on the irrationality of some numbers*, 19.11.2019.

### **Współpraca z innymi ośrodkami naukowymi**

1. Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego:

– dr P. Szyszkowska, prof. uczelni: współpraca z prof. A. Nowikiem (jedno wspólne opracowanie),

- dr W. Sieg: współpraca z prof. T. Natkańcem (jedna wspólna praca; udział w seminariach naukowych IM UG).

2. Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego:

- dr J. Stochmal: współpraca z prof. M. Nowakiem z (jedna wspólna praca wysłana do recenzji).

3. Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu:

- dr hab. M. Wójtowicz, prof. uczelni, dr H. Wiśniewska: (konsultacje naukowe w 2019/20).

4. Instytut Matematyki Ukraińskiej Akademii Nauk w Kijowie:

- dr hab. M. Wójtowicz, prof. uczelni: współpraca z prof. S. Maksymenko (konsultacje naukowe w 2019/20).

5. Wydział Informatyki Uniwersytetu w Tarnopolu, Ukraina:

- dr hab. M. Wójtowicz, prof. uczelni: współpraca z prof. Rusłanem Shevchukiem (referat kryptologiczny M.W. na Wydziale Informatyki Uniwersytetu w Tarnopolu 19.11.2019, oraz jeden wspólny referat kryptologiczny – z prof. R. Shevchukiem - na konferencji w Deggenedorfie, Niemcy, 16-18 wrzesień 2020).

### **Recenzje**

Dr W. Sieg, dr P. Szyszkowska, prof. uczelni, dr hab. M. Wójtowicz, prof. uczelni - po dwie recenzje dla bazy Mathematical Reviews.

### **Działalność organizacyjna w obszarze nauki**

1. Organizacja i nadzór nad seminarium naukowym Instytutu Matematyki –

dr P. Szyszkowska, prof. uczelni

2. Prowadzenie sekcji naukowej Kola Naukowego Dydaktyki Matematyki i Informatyki

Omega – dr J. Stochmal